Oefensessie 3: combinatoriek

1. Los op zonder gebruik te maken van je rekenmachine:

1.1. 0! = 1.2. 1! = 1.3. 4! = 1.4. $\binom{5}{2}$ = 1.5. $\binom{5}{3}$ =

1.6. $\binom{100}{100}$ = 1.7. $\binom{100}{1}$ = 1.8. $\binom{100}{0}$ = 1.9. $(5)_3$ = 1.10. $(10)_7$ =

1.11 Los op met rekenmachine: $\binom{70}{5}$ =

2.1. Toon aan via het voorbeeld $(x+y)^4$ dat de formule uit het boek hetzelfde resultaat geeft als de formule van het formularium.
2.2. Geef de ontbrekende coëfficiënt van de term a^8b^7 bij de uitwerking van $(a+b)^{15}$.

3. Op wikipedia vinden we de geschiedenis van de Belgische nummerplaat:

- Van 1951 tot 1961 hadden ze 1 letter gevolgd door 4 cijfers
- Van 1962 tot 1971 waren het twee letters gevolgd door 3 cijfers
- Tussen 1971 en 1973 werden tijdelijk de 3 cijfers tussen de twee letters geplaatst
- Van 1973 tot 2008 werden het drie letters gevolgd door 3 cijfers.
- Vanaf 25 juni 2008 worden de drie letters en drie cijfers omgedraaid.

3.1. Hoeveel nummerplaten waren er mogelijk met het systeem gebruikt in 1951?
3.2. Hoeveel nummerplaten zijn er mogelijk met het systeem dat in 1973 werd opgestart?
3.3. Hoeveel nummerplaten zijn er mogelijk met het systeem dat in 2008 werd opgestart?
3.4. In hoeveel van deze laatste nummerplaten, komt elke gebruikte letter of cijfer slechts een keer voor?
3.5. In hoeveel van deze nummerplaten, komt er minstens één gebruikte letter of cijfer meer dan één keer voor?

4. Een student heeft 12 verschillende audio-CD’s (5 rock- en 7 schlager-CD’s) liggen die hij in zijn CD-rek wil zetten.
4.1. Op hoeveel manieren kan hij ze in het rek zetten?
4.2. Hij wil een top 5 maken van de beste CD’s. Op hoeveel verschillende manieren kan hij dit doen?
4.3. Hij wil er 3 weggeven aan een vriendin, op hoeveel verschillende manieren kan hij dit doen?
4.4. Hij wil de 5 rock- en de 7 schlager-CD’s gescheiden houden, op hoeveel manieren kan hij de CD’s in het rek zetten?
4.5. Hij wil de Rock-CD’s rechts zetten en de schlager-CD’s links zetten, op hoeveel verschillende manieren kan hij dit doen?
4.6. Hij wil in het rek slechts een van de twee genres zetten, op hoeveel mogelijke manieren kan hij dit doen?

6. Drie rode driehoeken , 2 verschillend gekleurde vierhoeken en 4 blauwe cirkels moeten op een rijtje gezet worden. Op hoeveel verschillende manieren kan dit als de cirkels vooraan horen te staan?

7. Een appartement heeft 4 verdiepingen. De eerste telt 40 inwoners, de tweede 30 en de 2 bovenste verdiepingen tellen er telkens 10. Er wordt een appartementsraad bijeengebracht. Deze bestaat per definitie uit 2 bewoners van de eerste verdieping, 2 inwoners van de 2e verdieping en 1 bewoner van de twee bovenste verdiepingen. Hoeveel mogelijkheden zijn er?

8.1. Hoeveel verschillende reeksen van 6 getallen kan je maken met twee nullen en vier enen?
8.2. En als de rijtjes moeten beginnen met een 1?
8.3. En als de nullen niet naast elkaar mogen staan?

9. In een jaar zitten 10 studenten die een test afleggen. De test staat op 10 punten (er wordt niet met halve punten gewerkt).
9.1. Hoeveel verschillende resultaten zijn er mogelijk?
9.2. En hoeveel verschillende resultaten zijn er mogelijk als je weet dat precies 6 leerlingen een 5 of minder halen?

10. Een student legt een examen af, dit examen telt 10 vragen met 4 mogelijkheden waarvan 1 het juiste is. Op hoeveel manieren kan hij het examen oplossen opdat 7 vragen juist en 3 vragen fout worden beantwoord?

11. Je gooit driemaal een dobbelsteen op tafel.
11.1. Hoeveel verschillende worpen zijn er mogelijk?
11.2. In hoeveel van die worpen is de som van de ogen maximum 5?

12. Hoeveel anagrammen heeft piano? (Piano is tevens een anagram van zichzelf)

13. Hoeveel anagrammen heeft het woord veel?

14. Op een lottoformulier moet je 6 cijfers van de 42 aankruisen. Op hoeveel verschillende manier kan je er 5 goed hebben en 1 fout?

15. In een winkel worden 6 verschillende merken van wasproduct verkocht. Er komen 6 klanten binnen die een wasproduct kopen.
15.1. Hoeveel mogelijkheden zijn er dat ze allemaal een ander merk kopen?
15.2. Hoeveel mogelijkheden zijn er dat een van de merken minstens twee keer wordt verkocht?

16. Een speelbord van een gezelschapspel telt 9 posities. Men beschikt over 3 maal 3 pionnen, telkens van een verschillende kleur. (bvb. 3 keer rood, 3 keer blauw, 3 keer zwart). Het spel wordt gespeeld met drie spelers die elk over drie pionnen van dezelfde kleur beschikken. Bij een spelbeurt plaatst een speler zijn 3 pionnen op het bord. Op hoeveel verschillende wijzen kunnen de drie spelers hun 9 pionnen op het spelbord plaatsen?

17. We moeten een rij maken van 5 cijfers die telkens gekozen worden uit de verzameling {3,7,9}.
17.1. Hoeveel verschillende rijen zijn er met precies 4 keer het cijfer 3?
17.2. Hoeveel verschillende rijen zijn er waarin het eerste cijfer een 9 is?
17.3. Hoeveel verschillende rijen zijn er waarvoor de som van de vijf cijfers minstens 35 is?

Oplossingen

1.1. 0! = 1 1.2. 1! = 1 1.3. 4! = 4*3*2*1=24 1.4. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$

1.5. $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5\times 4}{2} = 10$ 1.6. $\binom{100}{100}$=1 1.7. $\binom{100}{1}$=100 1.8. $\binom{100}{0}$=1

1.9. $(5)_3 = \frac{5!}{3!} = 5*4 = 20$ 1.10. $(10)_7 = \frac{10!}{7!} = 10*9*8 = 720$

1.11. $\binom{70}{5} = \frac{70!}{5!(70-5)!}$ 70! Kunnen de meeste rekenmachines niet uitrekenen. Wanneer we echter schrappen blijft $\frac{70*69*68*67*66}{5!}$ over wat wel uit te rekenen valt: 12103014

2.1.
Formule handboek:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^{4-0} y^0 + \binom{4}{1} x^{4-1} y^1 + \binom{4}{2} x^{4-2} y^2 + \binom{4}{3} x^{4-3} y^3 + \binom{4}{4} x^{4-4} y^4$$

$$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Formule formularium:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0} x^0 y^{4-0} + \binom{4}{1} x^1 y^{4-1} + \binom{4}{2} x^2 y^{4-2} + \binom{4}{3} x^3 y^{4-3} + \binom{4}{4} x^4 y^{4-4}$$

$$= y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

2.2. $\binom{15}{7} = 6435$

3.1. 26*10*10*10*10=26*10^4=260.000
3.2. 26^3*10^3=17.576.000
3.3. 10^3*26^3=17.576.000
3.4. $(26)_3 \times (10)_3 = (26\times 25\times 24)\times(10\times 9\times 8) = 15.600\times 720 = 11.232.000$
3.5. 17.576.000-11.232.000=6.344.000 oftewel alle mogelijke nummerplaten zonder de nummerplaten met waarop elk cijfer en letter slechts 1 maal is gebruikt.

4.1. 12! = 479.001.600
4.2. $(12)_5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95.040$
4.3. $\binom{12}{3} = 220$
4.4. 2*5!*7!=1.209.600
4.5. 5!*7!=604.800
4.6. 5!+7!=5160

6. $\binom{5}{2}\times 2=\binom{5}{3}\times 2=(5)_2=20$

Er zijn 9 plaatsen in het rijtje, de eerste 4 zijn bezet door de cirkels, deze plaatsen staan vast en aangezien de cirkels allemaal dezelfde kleur hebben maakt de volgorde niet uit. Hierna plaatsen we de vierhoeken, we kunnen deze op 5 plaatsen zetten en de onderlinge volgorde maakt een verschil aangezien ze een verschillende kleur hebben. We maken hiervoor gebruik van een variatie. Hierna moeten de overige plaatsen opgevuld worden door rode vierhoeken, de onderlinge volgorde maakt niet uit omdat ze allemaal rood zijn.

7. $\binom{40}{2}\times\binom{30}{2}\times\left(\binom{10}{1}+\binom{10}{1}\right)=6.786.000$

8.1. $\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$

8.2. $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10$

8.3. $\binom{6}{2}-5=15-5=10$

9.1. 11^{10}

9.2. $6^6\times 5^4\times\binom{10}{4}==6.123.600.000$

10. $1^7\times 3^3\times\binom{10}{3}=3240$

11.1. $6^3 = 216$
11.2. 10

12. 5!

13. $\frac{4!}{2!}$

14. $\binom{6}{5}\times\binom{36}{1}\times=6\times 36=216$

15.1. 6!
15.2. 6^6-6!=45936

16. $\binom{9}{3}\times\binom{6}{3}\times\binom{3}{3}=1680$

17.1. $2\times\binom{5}{4}=10$
17.2. 3^4=81
17.3. Er mag hoogstens een keer een 3 in voorkomen:
- Er komt geen 3 in voor: 2^5 = 32 mogelijkheden
- Er komt één 3 in voor, dan mogen er nog hoogstens twee 7's inzitten:
  - Geen 7: 5 mogelijkheden (ofwel $\binom{5}{1}$)
  - Eén 7: 20 mogelijkheden: $\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}$
  - Twee 7's: $\binom{5}{1}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}=5\times 6\times 1=30$

In totaal zijn dit 32+5+20+30=87 mogelijkheden.